

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





روش‌های مختلف برای حل مسایل نقطه زینی

دانشجو

محسن مسعودی

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

دانشگاه گیلان

آذر ۱۳۹۹



مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

فهرست

فهرست مطالب

۲	۱ مقدمه
۷	۲ روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
۱۷	۳ مسائل نقطه زینی
۲۹	۴ مراجع



۱ - مقدمه



دستگاه معادلات خطی سازگار

$$Ax = b, \quad (1)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{C}^n$. ماتریس A تنک و از ابعاد بزرگ است که ممکن است منفرد یا نامنفرد باشد.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

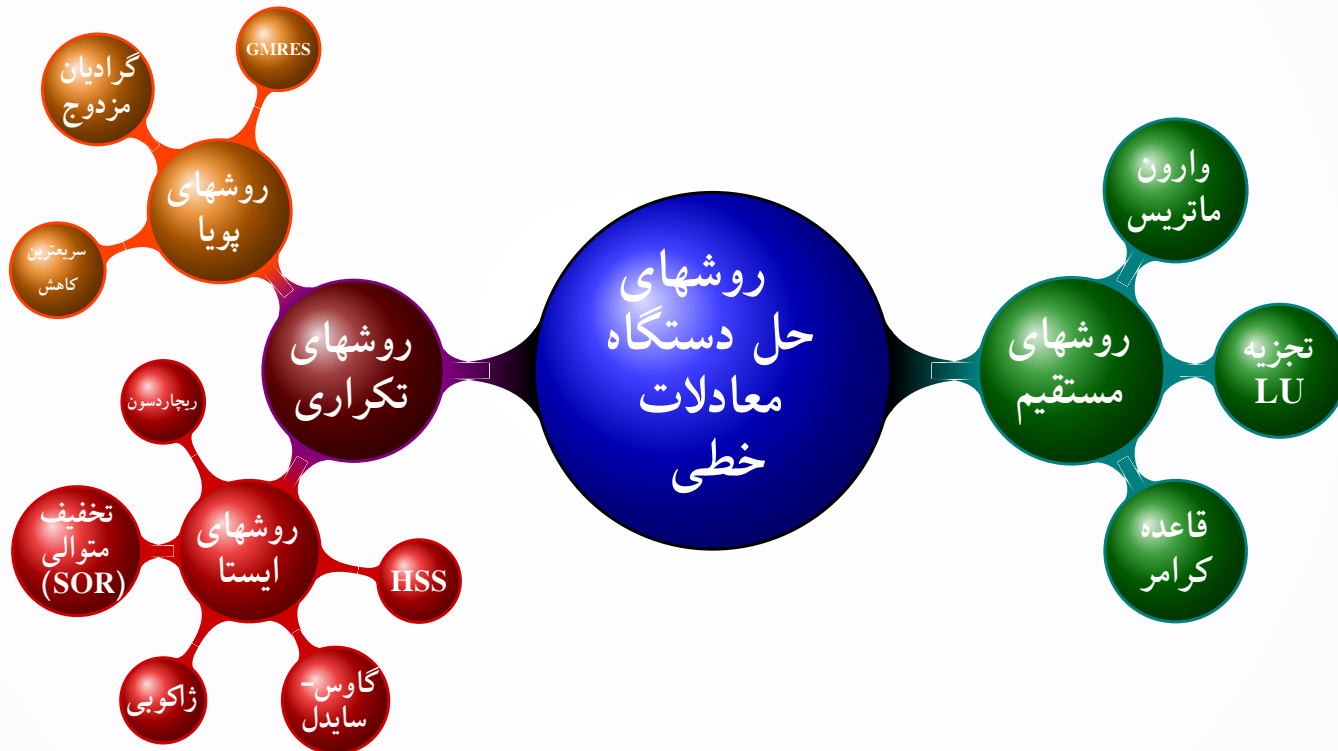
مراجع



روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع





پیش شرط ساز، دستگاه پیش شرط سازی شده و روش تکراری
فرض کنید ماتریس A را بتوان به صورت

$$A = M - N \quad (۲)$$

نوشت که در آن M نامنفرد است.
می‌توان به جای حل دستگاه (۱) دستگاه زیر را حل نمود:

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b, \quad (۳)$$

و یا اینکه از روش تکراری زیر استفاده نمود:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b. \quad (۴)$$

دستگاه (۳) را دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده، M را پیش‌شرط‌ساز دستگاه
(۱)، روش تکراری (۴) را روش تکراری وابسته به شکافت (۲) و ماتریس
 $T = M^{-1}N = I - M^{-1}A$ را ماتریس تکرار روش گویند.



همگرایی و نیمه همگرایی یک روش تکراری

اگر ماتریس A نا منفرد باشد، جواب دستگاه یکتاست و یک روش تکراری را همگرا گوئیم اگر به تنها جواب دستگاه همگرا باشد و اگر ماتریس A منفرد باشد، آنگاه دستگاه بینهایت جواب دارد و روش تکراری را نیمه همگرا گوئیم، اگر به یکی از این جوابها همگرا شود.

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



همگرایی و نیمه همگرایی یک روش تکراری

اگر ماتریس A نا منفرد باشد، جواب دستگاه یکتاست و یک روش تکراری را همگرا گوئیم اگر به تنها جواب دستگاه همگرا باشد و اگر ماتریس A منفرد باشد، آنگاه دستگاه بینهایت جواب دارد و روش تکراری را نیمه همگرا گوئیم، اگر به یکی از این جواب‌ها همگرا شود.

قضیه

یک روش تکراری با ماتریس تکرار T همگراست اگر و تنها اگر $\rho(T) < 1$ که در آن

$$\rho(T) = \max \{ |\lambda|, \lambda \in \sigma(T) \}, \quad (5)$$

و یک روش تکراری با ماتریس تکرار T نیمه همگراست اگر و تنها اگر $\text{rank}(\mathbf{I} - \mathbf{T})^2 = \text{rank}(\mathbf{I} - \mathbf{T})$ و $\nu(T) < 1$ که در آن

$$\nu(T) = \max \{ |\lambda|; \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 1 \}. \quad (6)$$



مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

۲- روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی



معرفی روش EPSS

فرض کنید ماتریس A یک ماتریس نیمه معین مثبت $(\mathbf{x}^*(A + A^*)\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n)$ و دارای شکافتی بصورت

$$A = P + S, \quad P \text{ نیمه معین مثبت}, \quad S^* = -S \quad (7)$$

باشد. اگر Σ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه شکافت‌های زیر را برای ماتریس A در نظر بگیرید:

$$A = (\Sigma + P) - (\Sigma - S) \quad (8)$$

$$= (\Sigma + S) - (\Sigma - P). \quad (9)$$

دنباله تکراری زیر را به ازای $\mathbf{x}^{(0)}$ دلخواه تولید کنید:

$$\begin{cases} (\Sigma + P)\mathbf{x}^{(k+\frac{1}{2})} = (\Sigma - S)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \\ (\Sigma + S)\mathbf{x}^{(k+1)} = (\Sigma - P)\mathbf{x}^{(k+\frac{1}{2})} + \mathbf{b}, \end{cases} \quad (10)$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زنی

مراجع



معرفی روش EPSS

در این صورت داریم:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}_{\text{EPSS}} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad (11)$$

$$\mathbf{T}_{\text{EPSS}} = (\Sigma + \mathbf{S})^{-1} (\Sigma - \mathbf{P}) (\Sigma + \mathbf{P})^{-1} (\Sigma - \mathbf{S}), \quad (12)$$

و $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ که در آن

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\gamma} (\Sigma + \hat{\mathbf{P}}) \Sigma^{-1} (\Sigma + \mathbf{S}), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\gamma} (\Sigma - \hat{\mathbf{P}}) \Sigma^{-1} (\Sigma - \mathbf{S}). \quad (13)$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطیمسائل نقطه
زینی

مراجع



معرفی روش EPSS

در این صورت داریم:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}_{\text{EPSS}} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad (11)$$

$$\mathbf{T}_{\text{EPSS}} = (\Sigma + \mathbf{S})^{-1}(\Sigma - \mathbf{P})(\Sigma + \mathbf{P})^{-1}(\Sigma - \mathbf{S}), \quad (12)$$

و $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ که در آن

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\rho}(\Sigma + \hat{\mathbf{P}})\Sigma^{-1}(\Sigma + \mathbf{S}), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\rho}(\Sigma - \hat{\mathbf{P}})\Sigma^{-1}(\Sigma - \mathbf{S}). \quad (13)$$

توجه

در روش‌های BTSS، TSS، PSS، HSS و SS که برای حل دستگاه معادلات خطی معرفی شده‌اند، $\Sigma = \alpha I (\alpha > 0)$.

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



مقادیر ویژه ماتریس تکرار روش EPSS

فرض کنید ماتریس $A = P + S$ یک شکافت نیمه معین مثبت و پادهرمیتی و ماتریس Σ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد. آنگاه برای هر $\lambda \in \sigma(T_{EPSS})$ ، داریم

$$|\lambda|^2 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}, \quad (14)$$

که در آن $\tilde{P} = \Sigma^{-1} P \Sigma^{-1}$ ، $r_1 = y^*(I + \tilde{P}^* \tilde{P})y > 0$ و $r_2 = y^*(\tilde{P}^* + \tilde{P})y \geq 0$ ، به ازای $y \in \mathbb{C}^n$ ، $y \neq 0$. بعلاوه، اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه $1 \notin \sigma(T_{EPSS})$.

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

مقادیر ویژه ماتریس تکرار روش EPSS

فرض کنید ماتریس $A = P + S$ یک شکافت نیمه معین مثبت و پادهرمیتی و ماتریس Σ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد. آنگاه برای هر $\lambda \in \sigma(T_{EPSS})$ ، داریم

$$|\lambda|^2 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}, \quad (14)$$

که در آن $\tilde{P} = \Sigma^{-1} P \Sigma^{-1}$ ، $r_1 = y^*(I + \tilde{P}^* \tilde{P})y > 0$ و $r_2 = y^*(\tilde{P}^* + \tilde{P})y \geq 0$ ، ازای $y \in \mathbb{C}^n$ ، $y \neq 0$. بعلاوه، اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه $1 \notin \sigma(T_{EPSS})$.

همگرایی روش EPSS

اگر ماتریس A یک ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه $\rho(T_{EPSS}) < 1$ و در نتیجه روش EPSS همگراست درغیراین صورت $\rho(T_{EPSS}) \leq 1$ و ممکن است همگرایی یا نیمه همگرایی وجود نداشته باشد.

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطیمسائل نقطه
زنی

مراجع



مثال

ماتریس نامنفرد و نیمه معین مثبت A را بصورت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید و فرض کنید $\Sigma = I$ و $P = A$. در این صورت $\sigma(\mathbf{T}_{\text{EPSS}}) = \{i, -i\}$ و در نتیجه $\rho(\mathbf{T}_{\text{EPSS}}) = 1$. بنابراین اگر ماتریس A نیمه معین مثبت باشد، ممکن است همگرایی یا نیمه همگرایی روش EPSS وجود نداشته باشد.

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



یک ایده برای همگرا کردن روش EPSS

فرض کنید ماتریس A یک ماتریس نامنفرد و نیمه معین مثبت باشد. بنا قضیه قبل $1 \notin \sigma(\mathbf{T}_{\text{EPSS}})$. دنباله تکراری

$$\tilde{u}^{(k+1)} = ((1 - \theta)I + \theta \mathbf{T}_{\text{EPSS}}) \tilde{u}^{(k)} + \tilde{c}_\theta, \quad \theta \in (0, 1), \quad (15)$$

را در نظر بگیرید که در آن $u^{(0)}$ دلخواه و $\tilde{c}_\theta = \theta \mathbf{P}_{\text{EPSS}}^{-1} b$. در این صورت این روش تکراری به ازای هر $\theta \in (0, 1)$ همگراست و در نتیجه برای هر دستگاه معادلات خطی نامنفرد و نیمه معین مثبت، می توان از پیش شرط ساز زیر استفاده نمود:

$$\tilde{\mathbf{P}}_\theta = \frac{1}{\theta} \mathbf{P}_{\text{EPSS}}, \quad \theta \in (0, 1]. \quad (16)$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

مثال

ماتریس نامنفرد و معین مثبت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} W & F\Omega \\ -F^T & N \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$w_{k,j} = \begin{cases} k+1 & \text{به ازای } j=k, \\ 1 & \text{به ازای } |k-j|=1, \quad k,j=1,2,\dots,q, \\ 0 & \text{جاهای دیگر,} \end{cases}$$

$$n_{k,j} = \begin{cases} k+1 & \text{به ازای } j=k, \\ 1 & \text{به ازای } |k-j|=1, \quad k,j=1,2,\dots,n-q, \\ 0 & \text{جاهای دیگر,} \end{cases}$$

$$f_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{به ازای } k=j+2q-n, \quad k=1,2,\dots,q, \quad j=1,2,\dots,n-q, \\ 0 & \text{جاهای دیگر,} \end{cases}$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

مثال

$$w_k = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n - q$$

در شکافت $A = P + S$ ، انتخاب‌های زیادی برای ماتریس P وجود دارند. چهار انتخاب زیر را برای این ماتریس در نظر می‌گیریم:

$$1. P_1 = D + L + U^*$$

$$2. P_2 = B_D + B_L + B_U^*$$

$$3. P_3 = H_A = \frac{1}{r}(A + A^*)$$

$$4. P_4 = A$$

که به ترتیب روش‌های TSS، BTSS، HSS و SS را پدید می‌آورند که در آن D ، L و U به ترتیب ماتریس‌های قطری، پایین مثلثی اکید و بالامثلثی اکید ماتریس A و

$$B_D = \begin{bmatrix} W & \circ \\ \circ & N \end{bmatrix}, \quad B_L = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ -F^T & \circ \end{bmatrix}, \quad B_U = \begin{bmatrix} \circ & F\Omega \\ \circ & \circ \end{bmatrix}. \quad (18)$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زنی

مراجع

مثال

فرض کنید Q_j به ازای هر $j = 1, 2, 3$ بصورت زیر باشد:

$$Q_1 = I, \quad Q_2 = \text{diag}(\text{diag}(A)), \quad Q_3 = BD. \quad (19)$$

روش EPSS را با ماتریس $P = P_i$ و $\Sigma = \alpha Q_j$ در نظر بگیرید. به ازای هر $j = 1, 2, 3$ تقریبی برای پارامتر بهینه برای α بصورت زیر به دست آمده است:

$$\alpha_*^{(i,j)} = \begin{cases} \|\tilde{A}_j\|, & i = 4, \\ \mu_{\max}^{(i,j)} \mu_{\min}^{(i,j)}, & i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (20)$$

که در آن $\tilde{A}_j = Q_j^{-\frac{1}{2}} A Q_j^{-\frac{1}{2}}$ و $\mu_{\max}^{(i,j)}$ و $\mu_{\min}^{(i,j)}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $Q_j^{-\frac{1}{2}} B D_i Q_j^{-\frac{1}{2}}$ می باشند.

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زنی

مراجع



جدول ۱: تکرار و زمان محاسبه برای روش تکراری IEPSS.

n	$\Sigma = \alpha Q_j$	$Q_1 = I$				$Q_2 = D$				$Q_3 = BD$			
		$P_1(TSS)$	$P_2(BTSS)$	$P_3(HSS)$	$P_4(SS)$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4
400	CPU	0.20	0.11	0.12	0.37	0.08	0.03	0.04	0.06	0.05	0.04	0.02	0.06
	IT	113	104	128	1076	9	9	8	13	6	8	4	7
800	CPU	0.15	0.11	0.12	0.61	0.06	0.09	0.13	0.08	0.07	0.05	0.02	0.15
	IT	159	147	182	1850	8	10	8	12	6	8	3	7
1600	CPU	0.43	0.18	0.20	2.18	0.10	0.08	0.12	0.14	0.12	0.14	0.04	0.37
	IT	223	206	257	3098	8	10	7	11	6	8	3	7
3200	CPU	1.69	0.48	1.39	5.06	1.04	0.39	0.42	1.26	0.47	0.38	0.25	2.30
	IT	314	291	362	4993	8	9	7	11	6	8	3	7
6400	CPU	3.53	1.56	3.05	11.59	2.18	1.91	1.24	2.65	1.67	1.03	0.84	6.13
	IT	442	413	511	7586	8	8	7	11	6	8	3	7

مقدمه

روش EPSS
برای حل
دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

۳- مسائل نقطه زینی



مسائل نقطه زینی

$$\mathcal{A}x \equiv \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad (21)$$

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(A + A^*)x > 0)$
 - $C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ماتریس نیمه معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(C + C^*)x \geq 0)$
- در این صورت ماتریس $A \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



مسائل نقطه زینی

$$\mathcal{A}x \equiv \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad (21)$$

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(A + A^*)x > 0)$
 - $C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ماتریس نیمه معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(C + C^*)x \geq 0)$
- در این صورت ماتریس $A \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است.

قضیه

اگر ماتریس A یک ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس A نامنفرد است اگر و تنها اگر

$$\text{null}(B^*) \cap \text{null}(C) = \{0\}.$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



روش HSS برای حل مسائل نقطه زینی

فرض کنید C یک ماتریس معین مثبت متقارن و $A = H + S$ شکافت هرمیتی و پاد هرمیتی ماتریس A باشد. در این صورت

$$A = \mathcal{H} + \mathcal{S} = \begin{bmatrix} H & \circ \\ \circ & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & B^* \\ -B & \circ \end{bmatrix}, \quad (22)$$

شکافت هرمیتی و پادهرمیتی ماتریس A خواهد بود. اگر ماتریس A معین مثبت متقارن باشد، آنگاه پیش‌شرط‌ساز روش HSS به صورت

$$\mathcal{P}_{\text{HSS}} = \begin{bmatrix} A + \alpha I & B^T + \frac{1}{\alpha} AB^T \\ -B & \alpha I + C \end{bmatrix}, \quad (23)$$

خواهد بود که دارای اختلاف

$$\mathcal{R}_{\text{HSS}} = \mathcal{P}_{\text{HSS}} - A = \begin{bmatrix} \alpha I & \frac{1}{\alpha} AB^T \\ \circ & \alpha I \end{bmatrix}, \quad (24)$$

با ماتریس A است.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطیمسائل نقطه
زینی

مراجع



روش RHSS برای حل مسائل نقطه زینی

یک حالت تعدیل یافته از پیش شرط ساز HSS در [۹] توسط کائو و همکاران به صورت زیر ارائه شده است:

$$\mathcal{P}_{\text{RHSS}} = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\alpha}AB^T \\ -B & \circ \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\text{RHSS}} = \mathcal{P}_{\text{RHSS}} - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \circ & (\frac{1}{\alpha}A - I)B^T \\ \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



روش RHSS برای حل مسائل نقطه زینی

یک حالت تعدیل یافته از پیش شرط ساز HSS در [۹] توسط کائو و همکاران به صورت زیر ارائه شده است:

$$\mathcal{P}_{\text{RHSS}} = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\alpha} AB^T \\ -B & \circ \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\text{RHSS}} = \mathcal{P}_{\text{RHSS}} - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \circ & (\frac{1}{\alpha} A - I) B^T \\ \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

قضیه

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متقارن معین مثبت، $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ یک ماتریس رتبه کامل، و α یک عدد مثبت باشد. در این صورت

$$\rho(\Gamma_{\text{RHSS}}) = \max_{1 \leq i \leq m} |1 - \alpha \mu_i|,$$

که در آن μ_i ، به ازای $(1 \leq i \leq m)$ ، مقادیر ویژه ماتریس $(BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ هستند. آنگاه روش تکراری RHSS همگراست اگر $\frac{2}{\mu_{\max}} < \alpha < 2$ و در نتیجه

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\mu_{\max} + \mu_{\min}}.$$

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطیمسائل نقطه
زینی

مراجع



روش REHSS برای حل مسائل نقطه زینی

هنگامی که α به عدد صفر نزدیک می‌شود، بلوک‌های (۱, ۲) در پیش شرط‌سازهای HSS و RHSS بی‌کمران می‌شوند. برای رفع این مشکل، شکافت

$$A = \mathcal{P}_{\text{REHSS}} - \mathcal{R}_{\text{REHSS}} = \begin{bmatrix} A & AB^T \\ -B & \alpha I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \circ & (A - I)B^T \\ \circ & \alpha I \end{bmatrix}, \quad (25)$$

را که در آن $\alpha > 0$ ، برای ماتریس A در نظر می‌گیریم.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



روش REHSS برای حل مسائل نقطه زینی

هنگامی که α به عدد صفر نزدیک می‌شود، بلوک‌های (۱, ۲) در پیش شرط‌سازهای HSS و RHSS بی‌کمران می‌شوند. برای رفع این مشکل، شکافت

$$A = \mathcal{P}_{\text{REHSS}} - \mathcal{R}_{\text{REHSS}} = \begin{bmatrix} A & AB^T \\ -B & \alpha I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \circ & (A - I)B^T \\ \circ & \alpha I \end{bmatrix}, \quad (25)$$

را که در آن $\alpha > 0$ ، برای ماتریس A در نظر می‌گیریم.

قضیه

فرض کنید $Q = B \left(\frac{1}{\alpha} A^{-1} - I \right) B^T$ و $\delta = \lambda_{\max}(Q)$. آنگاه برای هر $\alpha > \max\{\delta, 0\}$ ، خواهیم داشت $\rho(\Gamma_{\text{REHSS}}) < 1$.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطیمسائل نقطه
زینی

مراجع



قضیه

به ازای هر $\alpha > 0$ ، ماتریس پیش شرط سازی شده $\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}A$ دارای مقدار ویژه ۱ از تکرار جبری حداقل n می باشد. بقیه مقادیر ویژه برابر μ_i هستند که مقدار ویژه ماتریس $\hat{A} = (\alpha I + BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ می باشد.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



قضیه

به ازای هر $\alpha > 0$ ، ماتریس پیش شرط سازی شده $\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}A$ دارای مقدار ویژه ۱ از تکرار جبری حداقل n می باشد. بقیه مقادیر ویژه برابر μ_i هستند که مقدار ویژه ماتریس $\hat{A} = (\alpha I + BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ می باشد.

نتیجه

درجه چند جمله ای مینیمال ماتریس پیش شرط سازی شده $\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}A$ حداکثر برابر $m + 1$ است. بنابراین، بعد زیرفضای کرایل $\mathcal{K}_n(\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}A, b)$ حداکثر برابر $m + 1$ می باشد.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



قضیه

به ازای هر $\alpha > 0$ ، ماتریس پیش شرط سازی شده $\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}A$ دارای مقدار ویژه ۱ از تکرار جبری حداقل n می باشد. بقیه مقادیر ویژه برابر μ_i هستند که مقدار ویژه ماتریس $\hat{A} = (\alpha I + BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ می باشد.

نتیجه

درجه چند جمله ای مینیمال ماتریس پیش شرط سازی شده $\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}A$ حداکثر برابر $m + 1$ است. بنابراین، بعد زیرفضای کرایلف $\mathcal{K}_n(\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}A, b)$ حداکثر برابر $m + 1$ می باشد.

الگوریتم

۱. $As_1 = x_1$ را حل کنید.
۲. قرار دهید $s_2 = Bs_1 + x_2$
۳. $(\alpha I + BB^T)y_2 = s_2$ را حل کنید.
۴. قرار دهید $y_1 = s_1 - B^Ty_2$.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



جدول ۲: نتایج عددی برای مسأله حفره با درپوش متحرک با شبکه $2^r \times 2^r$

r	Precon.	$\alpha = 10^{-4}$		$\alpha = 10^{-2}$		$\alpha = 1$		$\alpha = 10^2$	
		IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
16×16	\mathcal{P}_{HSS}	4	0.04	5	0.06	13	0.16	106	1.46
	$\mathcal{P}_{\text{RHSS}}$	3	0.02	3	0.02	3	0.02	4	0.04
	$\mathcal{P}_{\text{REHSS}}$	3	0.02	3	0.02	3	0.02	3	0.02
32×32	\mathcal{P}_{HSS}	8	0.37	9	0.45	144	8.45	†	-
	$\mathcal{P}_{\text{RHSS}}$	5	0.19	5	0.2	5	0.21	9	0.43
	$\mathcal{P}_{\text{REHSS}}$	5	0.21	4	0.12	3	0.07	3	0.07
64×64	\mathcal{P}_{HSS}	14	3.87	47	14.21	†	-	†	-
	$\mathcal{P}_{\text{RHSS}}$	8	1.97	8	2.03	9	2.29	27	8.1
	$\mathcal{P}_{\text{REHSS}}$	11	3.08	3	0.47	3	0.42	3	0.39
128×128	\mathcal{P}_{HSS}	38	76.32	†	-	†	-	†	-
	$\mathcal{P}_{\text{RHSS}}$	15	30.85	14	25.95	17	33.46	79	160.91
	$\mathcal{P}_{\text{REHSS}}$	9	17.3	3	3.86	3	3.69	3	3.86
256×256	\mathcal{P}_{HSS}	115	2064.44	-	††	-	‡	-	‡
	$\mathcal{P}_{\text{RHSS}}$	37	641.5	28	471.97	38	648.74	-	‡
	$\mathcal{P}_{\text{REHSS}}$	5	67.63	3	33.11	3	31.91	3	27.43

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



جدول ۳: پیش شرط‌سازهای خاصی از پیش شرط‌ساز \mathcal{P}_{EPSS}

مرجع	نیمه همگرایی همگرایی	پیش شرط‌ساز	P_β	P_α	C	B	A	
[۴]	همگرا	\mathcal{P}_{HSS}	αI	αI	SPSD	رتبه کامل	PD	$B_P = B$
[۲۲]	همگرا	\mathcal{P}_{HSS}	αI	αI	SPSD	رتبه کامل	SPSD	
		\mathcal{P}_{GHSS}	βI	αI	HPSD		HPD	
		\mathcal{P}_{EHSS}	βQ_2	αQ_1	HPSD		HPD	
[۱]	همگرا	\mathcal{P}_{RHSS}	$\alpha I + Q$	αI	°	رتبه کامل	HPD	
[۱۰]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{RHSS}	$\alpha I + Q$	αI	°	رتبه ناقص	HPD	
[۳]	همگرا	\mathcal{P}_{PHSS}	αQ	αA	°	رتبه کامل	HPD	
[۲]	همگرا	\mathcal{P}_{AHSS}	βQ	αA	°	رتبه کامل	HPD	
[۱۴]	همگرا	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	αI	αI	°	رتبه کامل	PD	
[۲۰]	همگرا	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	αI	αI	HPSD	رتبه کامل	PD	
[۱۲، ۲۳]	همگرا	\mathcal{P}_{GPSS}	βI	αI	°	رتبه کامل	PD	
[۱۳]	نیمه همگرا	$\mathcal{P}_{EPSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	βQ_2	αQ_1	°	رتبه ناقص	PD	
[۵]	همگرا	\mathcal{P}_{RPSS}	$\alpha I + Q$	αI	°	رتبه کامل	PD	

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

مرجع	نیمه همگرایی همگرایی	پیش شرط ساز	P_β	P_α	C	B	A	
[۶]	همگرا	\mathcal{P}_{SS}	αI	αI	°	رتبه کامل	HPD	$B_P = °$
[۱۱، ۱۵]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه کامل	SPD	
[۱۶]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل	SPD	
[۸]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه ناقص	PD	
[۲۱]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه ناقص	SPD	
[۱۹]	نیمه همگرا و همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل و ناقص	PD	
[۱۶]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل	SPD	
[۱۷]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	SPSD	رتبه کامل	PD	
[۷]	همگرا	\mathcal{P}_{GSS}	βI	αI	°	رتبه کامل	PD	
[۲۴]	همگرا	\mathcal{P}_{ESS}	Q_2	Q_1	°	رتبه کامل	SPD	
[۱۸]	نیمه همگرا	\mathcal{P}_{ESS}	βQ_2	αQ_1	°	رتبه ناقص	PD	



جدول ۴: نتایج عددی برای همگرایی روش‌های مختلف هنگامیکه ماتریس A نامنفرد است.

grid	prec.	HSS	GHSS	EHSS	PSS	GPSS	EPSS	SS	GSS	ESS	SEPPS
32 × 32	t_α	-2.25	-2.00	-0.75	-2.25	-2.00	-0.75	-4.00	-3.75	-3.50	-4.00
	t_β	-2.25	-2.50	-0.75	-2.25	-2.50	-0.75	-4.00	-4.00	-3.75	0.00
	IT	61	54	52	74	56	54	6	6	3	17
	CPU	0.14	0.11	0.12	0.10	0.08	0.08	0.02	0.03	0.02	0.02
	R_K	7.5e-10	8.8e-10	8.0e-10	9.6e-10	9.1e-10	9.5e-10	6.9e-11	7.9e-10	7.3e-10	4.3e-10
64 × 64	t_α	-2.50	-2.25	-1.00	-2.75	-2.25	-1.00	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00
	t_β	-2.50	-3.75	-1.25	-2.75	-3.75	-1.25	-4.00	-4.00	-3.75	0.00
	IT	199	92	90	156	92	90	9	9	3	17
	CPU	3.62	1.31	1.50	1.16	0.56	0.55	0.21	0.20	0.14	0.14
	R_K	9.3e-10	8.7e-10	9.6e-10	8.7e-10	8.7e-10	8.8e-10	1.7e-10	1.7e-10	6.5e-10	8.1e-10
128 × 128	t_α	-	-2.50	-1.25	-3.50	-2.50	-1.25	-4.00	-4.00	-3.75	-4.00
	t_β	-	-4.00	-1.50	-3.50	-4.00	-1.75	-4.00	-4.00	-3.75	0.00
	IT	†	231	163	430	235	164	17	17	4	19
	CPU	-	18.80	15.55	10.86	6.36	4.41	1.89	1.91	1.12	0.86
	R_K	-	9.6e-10	9.6e-10	9.9e-10	9.7e-10	9.9e-10	3.1e-10	3.1e-10	4.9e-10	6.1e-10
256 × 256	t_α	-	-	-1.25	-	-	-1.25	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00
	t_β	-	-	-2.00	-	-	-2.00	-4.00	-4.00	-4.00	0.00
	IT	†	†	243	†	†	242	44	44	4	24
	CPU	-	-	129.01	-	-	31.72	13.11	12.69	10.57	7.49
	R_K	-	-	9.9e-10	-	-	1.0e-09	9.0e-10	9.0e-10	7.7e-10	5.5e-10

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



جدول ۵: نتایج عددی برای همگرایی روش‌های مختلف هنگامیکه ماتریس A منفرد است.

grid	prec.	HSS	GHSS	EHSS	PSS	GPSS	EPSS	SS	GSS	ESS	SEPSS
32 × 32	t_α	-2.25	-2.25	-0.75	-2.25	-2.00	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00
	t_β	-2.25	-2.25	-0.75	-2.25	-2.50	2.75	-4.00	-4.00	-4.00	0.00
	IT	41	41	41	48	46	19	5	5	3	10
	CPU	0.14	0.12	0.13	0.05	0.10	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02
	R_K	9.7e-10	9.7e-10	8.7e-10	8.5e-10	9.8e-10	1.0e-09	1.0e-10	1.0e-10	2.2e-12	9.6e-10
64 × 64	t_α	-2.50	-2.50	-1.25	-2.50	-2.50	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00
	t_β	-2.50	-3.00	-0.50	-2.50	-3.00	3.00	-4.00	-3.75	-4.00	0.00
	IT	73	65	67	71	61	43	7	7	3	11
	CPU	1.34	1.32	1.92	0.41	0.36	0.24	0.19	0.23	0.15	0.14
	R_K	9.1e-10	8.8e-10	8.9e-10	9.3e-10	9.7e-10	9.9e-10	3.4e-10	7.1e-10	1.1e-11	9.8e-10
128 × 128	t_α	-2.75	-2.75	-1.25	-3.00	-2.75	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00
	t_β	-2.75	-3.75	-1.25	-3.00	-3.75	2.75	-4.00	-4.00	-3.50	0.25
	IT	144	104	103	114	95	87	12	12	3	13
	CPU	14.72	12.33	13.73	4.20	3.95	2.38	2.33	2.01	1.05	0.81
	R_K	9.9e-10	9.6e-10	1.0e-09	9.3e-10	9.5e-10	9.9e-10	6.4e-10	6.4e-10	1.9e-10	9.3e-10
256 × 256	t_α	-3.25	-3.00	-1.50	-3.25	-3.00	-1.75	-4.00	-4.00	-4.00	-4.00
	t_β	-3.25	-4.00	-1.50	-3.25	-4.00	-0.75	-4.00	-4.00	-3.75	-0.25
	IT	259	170	164	234	167	153	31	31	3	14
	CPU	349.78	140.05	110.58	36.75	25.45	23.76	11.75	11.40	10.29	6.51
	R_K	9.6e-10	9.3e-10	9.7e-10	9.8e-10	9.8e-10	9.7e-10	9.0e-10	9.0e-10	6.8e-10	6.8e-10

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

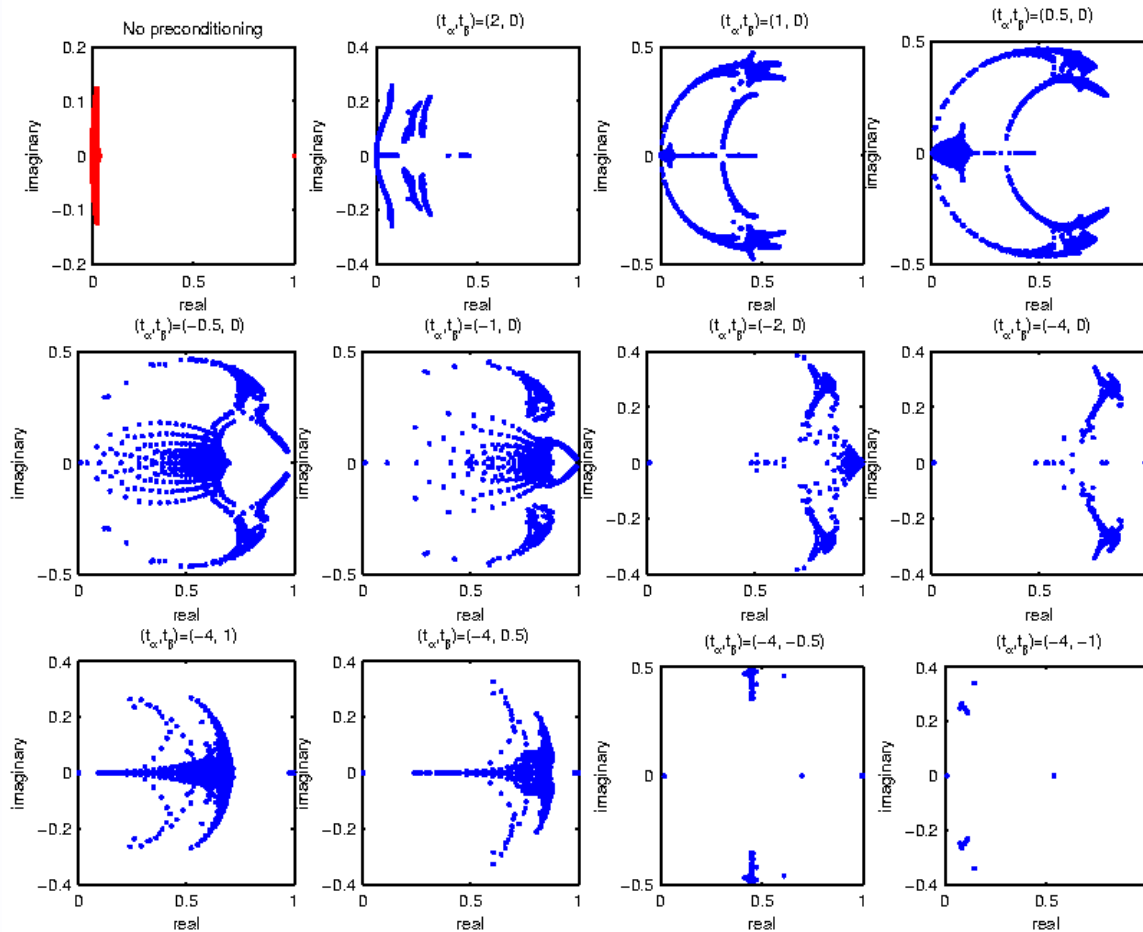
مراجع

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



شکل ۱: مقادیر ویژه ماتریس $P_{SEPSS}^{-1}A$ برای مسئله نویر- استوکس.



Theorem

قضیه

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Theorem

قضیه

Lemma

لم

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Theorem

قضیه

Lemma

لم

Remark

تبصره

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Theorem

قضیه

Lemma

لم

Remark

تبصره

Proposition

گزاره

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Theorem

قضیه

Lemma

لم

Remark

تبصره

Proposition

گزاره

Note

نکته

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Theorem

قضیه

Lemma

لم

Remark

تبصره

Proposition

گزاره

Note

نکته

Algorithm

الگوریتم

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Theorem

قضیه

Lemma

لم

Remark

تبصره

Proposition

گزاره

Note

نکته

Algorithm

الگوریتم

Corollary

نتیجه

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Definition

تعریف

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Definition

تعریف

Proof

اثبات

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



Definition

تعریف

Proof

اثبات

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

۴ - مراجع



- [1] BAI, Z.-Z., AND BENZI, M. Regularized HSS iteration methods for saddle-point linear systems. *BIT Numerical Mathematics* 57, 2 (2017), 287–311.
- [2] BAI, Z.-Z., AND GOLUB, G. H. Accelerated Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for saddle-point problems. *IMA Journal of Numerical Analysis* 27, 1 (2007), 1–23.
- [3] BAI, Z.-Z., GOLUB, G. H., AND PAN, J.-Y. Preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite linear systems. *Numerische Mathematik* 98, 1 (2004), 1–32.
- [4] BENZI, M., AND GOLUB, G. H. A preconditioner for generalized saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 26, 1 (2004), 20–41.
- [5] CAO, Y. Regularized DPSS preconditioners for non-Hermitian saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 84 (2018), 96–102.
- [6] CAO, Y., DU, J., AND NIU, Q. Shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 272 (2014), 239–250.
- [7] CAO, Y., LI, S., AND YAO, L.-Q. A class of generalized shift-splitting preconditioners for nonsymmetric saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 49 (2015), 20–27.
- [8] CAO, Y., AND MIAO, S.-X. On semi-convergence of the generalized shift-splitting iteration method for singular nonsymmetric saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 71, 7 (2016), 1503–1511.
- [9] CAO, Y., YAO, L., JIANG, M., AND NIU, Q. A relaxed HSS preconditioner for saddle point problems from meshfree discretization. *Journal of Computational Mathematics* 31, 4 (2013), 398–421.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



- [10] CHAO, Z., CHEN, G., AND GUO, Y. On the semi-convergence of regularized HSS iteration methods for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 76, 2 (2018), 438–450.
- [11] CHEN, C.-R., AND MA, C.-F. A generalized shift-splitting preconditioner for singular saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 269 (2015), 947–955.
- [12] HUANG, Z.-G., WANG, L.-G., XU, Z., AND CUI, J.-J. A generalized variant of the deteriorated PSS preconditioner for nonsymmetric saddle point problems. *Numerical Algorithms* 75, 4 (2017), 1161–1191.
- [13] LIANG, Z.-Z., AND ZHANG, G.-F. Semi-convergence analysis of preconditioned deteriorated PSS iteration method for singular saddle point problems. *Numerical Algorithms* 78, 2 (2018), 379–404.
- [14] PAN, J.-Y., NG, M. K., AND BAI, Z.-Z. New preconditioners for saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 172, 2 (2006), 762–771.
- [15] REN, Z.-R., CAO, Y., AND NIU, Q. Spectral analysis of the generalized shift-splitting preconditioned saddle point problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 311 (2017), 539–550.
- [16] SALKUYEH, D. K., MASOUDI, M., AND HEZARI, D. On the generalized shift-splitting preconditioner for saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 48 (2015), 55–61.
- [17] SALKUYEH, D. K., MASOUDI, M., AND HEZARI, D. A preconditioner based on the shift-splitting method for generalized saddle point problems. in *46th Annual Iranian Mathematics Conference* (2015), volume 1, Yazd University, pp. 1061–1064.
- [18] SALKUYEH, D. K., AND RAHIMIAN, M. A modification of the generalized shift-splitting method for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 74, 12 (2017), 2940–2949.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع



- [19] SHEN, Q.-Q., AND SHI, Q. Generalized shift-splitting preconditioners for nonsingular and singular generalized saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 72, 3 (2016), 632–641.
- [20] SHEN, S.-Q. A note on PSS preconditioners for generalized saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 237 (2014), 723–729.
- [21] SHI, Q., SHEN, Q.-Q., AND YAO, L.-Q. Eigenvalue bounds of the shift-splitting preconditioned singular nonsymmetric saddle-point matrices. *Journal of Inequalities and Applications* 269 (2015), 947–955.
- [22] SIMONCINI, V., AND BENZI, M. Spectral properties of the Hermitian and skew-Hermitian splitting preconditioner for saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 26, 2 (2004), 377–389.
- [23] WANG, R.-R., NIU, Q., MA, F., AND LU, L.-Z. Spectral properties of a class of matrix splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 298 (2016), 138–151.
- [24] ZHENG, Q., AND LU, L. Extended shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 313 (2017), 70–81.

مقدمه

روش EPSS
برای حل دستگاه
معادلات خطی

مسائل نقطه
زینی

مراجع

با تشکر از توجه شما

