بسم الله الرحمن الرحیم

نتایجی در پیش‌شرط‌سازی مسائل نقطه زینی

دانشجو

محسن مسعودی

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

دانشگاه گیلان

اسفند ۱۳۹۷

فهرست

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۲

۲ روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی ۷

۳ مسائل نقطه زینی ۱۷

۴ مراجع ۲۹

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

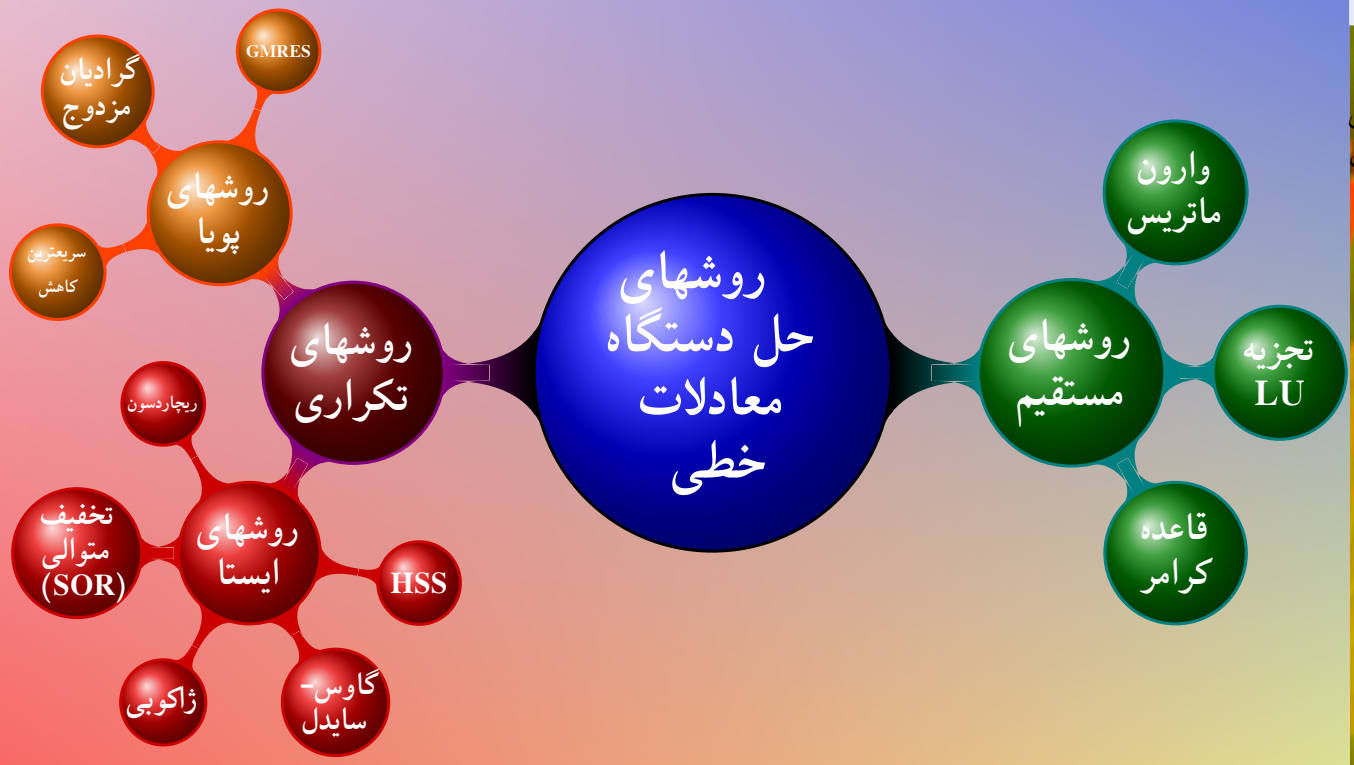
۱ ــ مقدمه

دستگاه معادلات خطی سازگار

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. ماتریس $\mathbf{A}$ تنک و از ابعاد بزرگ است که ممکن است منفرد یا نامنفرد باشد.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع



مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

پییش شرط ساز، دستگاه پیش شرط سازی شده و روش تکراری

فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}$ را بتوان به صورت

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \tag{۲}$$

نوشت که در آن $\mathbf{M}$ نامنفرد است.

می‌توان به جای حل دستگاه (۱) دستگاه زیر را حل نمود:

$$\mathbf{M}^{-۱}\mathbf{A}x = \mathbf{M}^{-۱}\mathbf{b}, \tag{۳}$$

و یا اینکه از روش تکراری زیر استفاده نمود:

$$\mathbf{x}^{(k+۱)} = \mathbf{M}^{-۱}\mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{M}^{-۱}\mathbf{b}. \tag{۴}$$

دستگاه (۳) را دستگاه پیش‌شرط‌سازی شده، $\mathbf{M}$ را پیش‌شرط‌ساز دستگاه (۱)، روش تکراری (۴) را روش تکراری وابسته به شکافت (۲) و ماتریس $\mathbf{T} = \mathbf{M}^{-۱}\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-۱}\mathbf{A}$ را ماتریس تکرار روش گویند.

همگرایی و نیمه همگرایی یک روش تکراری

اگر ماتریس A نا منفرد باشد، جواب دستگاه یکتاست و یک روش تکراری را همگرا گوییم اگر به تنها جواب دستگاه همگرا باشد و اگر ماتریس A منفرد باشد، آنگاه دستگاه بینهایت جواب دارد و روش تکراری را نیمه همگرا گوییم، اگر به یکی از این جواب‌ها همگرا شود.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

همگرایی و نیمه همگرایی یک روش تکراری

اگر ماتریس $\mathbf{A}$ نا منفرد باشد، جواب دستگاه یکتاست و یک روش تکراری را همگرا گوییم اگر به تنها جواب دستگاه همگرا باشد و اگر ماتریس $\mathbf{A}$ منفرد باشد، آنگاه دستگاه بینهایت جواب دارد و روش تکراری را نیمه همگرا گوییم، اگر به یکی از این جواب‌ها همگرا شود.

قضیه

یک روش تکراری با ماتریس تکرار $\mathbf{T}$ همگراست اگر و تنها اگر $\rho(\mathbf{T}) < ۱$ که در آن

$$\rho(\mathbf{T}) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(\mathbf{T})\}, \qquad (۵)$$

و یک روش تکراری با ماتریس تکرار $\mathbf{T}$ نیمه همگراست اگر و تنها اگر $rank(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{۲} = rank(\mathbf{I}-\mathbf{T})$ و $\nu(\mathbf{T}) < ۱$ که در آن

$$\nu(\mathbf{T}) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(\mathbf{T}),\ \lambda \neq ۱\}. \qquad (۶)$$

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

۲ـ روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی

معرفی روش EPSS

فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت $(\mathbf{x}^*(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)\mathbf{x} \geq ۰, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n)$ و دارای شکافتی بصورت

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{S}, \quad \mathbf{P} \text{ نیمه معین مثبت}, \quad \mathbf{S}^* = -\mathbf{S} \tag{۷}$$

باشد. اگر Σ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه شکافت‌های زیر را برای ماتریس $\mathbf{A}$ در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = (\Sigma + \mathbf{P}) - (\Sigma - \mathbf{S}) \tag{۸}$$

$$= (\Sigma + \mathbf{S}) - (\Sigma - \mathbf{P}). \tag{۹}$$

دنباله تکراری زیر را به ازای $\mathbf{x}^{(۰)}$ دلخواه تولید کنید:

$$\begin{cases} (\Sigma + \mathbf{P})\mathbf{x}^{(k+\frac{۱}{۲})} = (\Sigma - \mathbf{S})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \\ (\Sigma + \mathbf{S})\mathbf{x}^{(k+۱)} = (\Sigma - \mathbf{P})\mathbf{x}^{(k+\frac{۱}{۲})} + \mathbf{b}, \end{cases} \tag{۱۰}$$

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

معرفی روش EPSS

در این‌صورت داریم:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}_{\mathrm{EPSS}}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \tag{11}$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{EPSS}} = (\Sigma + \mathbf{S})^{-1}(\Sigma - \mathbf{P})(\Sigma + \mathbf{P})^{-1}(\Sigma - \mathbf{S}), \tag{12}$$

و $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ که در آن

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\Sigma + \hat{\mathbf{P}})\Sigma^{-1}(\Sigma + \mathbf{S}), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2}(\Sigma - \hat{\mathbf{P}})\Sigma^{-1}(\Sigma - \mathbf{S}). \tag{13}$$

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

معرفی روش EPSS

در این‌صورت داریم:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}_{\mathrm{EPSS}}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \tag{11}$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{EPSS}} = (\Sigma + \mathbf{S})^{-1}(\Sigma - \mathbf{P})(\Sigma + \mathbf{P})^{-1}(\Sigma - \mathbf{S}), \tag{12}$$

و $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ که در آن

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\Sigma + \hat{\mathbf{P}})\Sigma^{-1}(\Sigma + \mathbf{S}), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2}(\Sigma - \hat{\mathbf{P}})\Sigma^{-1}(\Sigma - \mathbf{S}). \tag{13}$$

توجه

در روش‌های BTSS، TSS، PSS، HSS و SS که برای حل دستگاه معادلات خطی معرفی شده‌اند، $\Sigma = \alpha I (\alpha > 0)$.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقادیر ویژه ماتریس تکرار روش EPSS

فرض کنید ماتریس $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{S}$ یک شکافت نیمه معین مثبت و پادهرمیتی و ماتریس Σ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد. آنگاه برای هر $\lambda \in \sigma(\mathbf{T}_{\text{EPSS}})$، داریم

$$|\lambda|^{۲} = \frac{r_{۱} - r_{۲}}{r_{۱} + r_{۲}}, \qquad (۱۴)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{P}} = \Sigma^{\frac{-۱}{۲}}\mathbf{P}\Sigma^{\frac{-۱}{۲}}$، $r_{۱} = y^{*}(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}}^{*}\tilde{\mathbf{P}})y > ۰$ و $r_{۲} = y^{*}(\tilde{\mathbf{P}}^{*} + \tilde{\mathbf{P}})y \geq ۰$ به ازای $۰ \neq y \in \mathbb{C}^{n}$. بعلاوه، اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه $۱ \notin \sigma(\mathbf{T}_{\text{EPSS}})$.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقادیر ویژه ماتریس تکرار روش EPSS

فرض کنید ماتریس $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{S}$ یک شکافت نیمه معین مثبت و پادهرمیتی و ماتریس Σ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد. آنگاه برای هر $\lambda \in \sigma(\mathbf{T}_{\text{EPSS}})$، داریم

$$|\lambda|^{۲} = \frac{r_{۱} - r_{۲}}{r_{۱} + r_{۲}}, \qquad (۱۴)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{P}} = \Sigma^{\frac{-۱}{۲}}\mathbf{P}\Sigma^{\frac{-۱}{۲}}$، $r_{۱} = y^{*}(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}}^{*}\tilde{\mathbf{P}})y > ۰$ و $r_{۲} = y^{*}(\tilde{\mathbf{P}}^{*} + \tilde{\mathbf{P}})y \geq ۰$ به ازای $۰ \neq y \in \mathbb{C}^{n}$. بعلاوه، اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه $۱ \notin \sigma(\mathbf{T}_{\text{EPSS}})$.

همگرایی روش EPSS

اگر ماتریس $\mathbf{A}$ یک ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه $\rho(\mathbf{T}_{\text{EPSS}}) < ۱$ و در نتیجه روش EPSS همگراست درغیراین صورت $\rho(\mathbf{T}_{\text{EPSS}}) \leq ۱$ و ممکن است همگرایی یا نیمه همگرایی وجود نداشته باشد.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مثال

ماتریس نامنفرد و نیمه معین مثبت $\mathbf{A}$ را بصورت

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید و فرض کنید $\Sigma = I$ و $\mathbf{P} = \mathbf{A}$. در این صورت $\sigma(\mathbf{T}_{\text{EPSS}}) = \{i, \ -i\}$ و در نتیجه $\rho(\mathbf{T}_{\text{EPSS}}) = ۱$. بنابراین اگر ماتریس $\mathbf{A}$ نیمه معین مثبت باشد، ممکن است همگرایی یا نیمه همگرایی روش EPSS وجود نداشته باشد.

یک ایده برای همگرا کردن روش EPSS

فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}$ یک ماتریس نامنفرد و نیمه معین مثبت باشد. بنا قضیه قبل $1 \notin \sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{EPSS}})$. دنباله تکراری

$$\tilde{u}^{(k+1)} = ((1-\theta)I + \theta \mathbf{T}_{\mathrm{EPSS}})\, \tilde{u}^{(k)} + \tilde{c}_\theta,\ \ \theta \in (0, 1), \qquad (15)$$

را در نظر بگیرید که در آن $u^{(0)}$ دلخواه و $\tilde{c}_\theta = \theta \mathbf{P}_{\mathrm{EPSS}}^{-1} b$. در این صورت این روش تکراری به ازای هر $\theta \in (0, 1)$، همگراست و در نتیجه برای هر دستگاه معادلات خطی نامنفرد و نیمه معین مثبت، می‌توان از پیش‌شرط‌ساز زیر استفاده نمود:

$$\tilde{\mathbf{P}}_\theta = \frac{1}{\theta}\mathbf{P}_{\mathrm{EPSS}},\ \ \theta \in (0, 1]. \qquad (16)$$

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مثال

ماتریس نامنفرد و معین مثبت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} W & F\Omega \\ -F^T & N \end{bmatrix}, \qquad (۱۷)$$

$$w_{k,j} = \begin{cases} k+۱ & \text{به ازای } j = k, \\ ۱ & \text{به ازای } |k-j| = ۱, \quad k,j = ۱,۲,\ldots,q, \\ ۰ & \text{جاهای دیگر}, \end{cases}$$

$$n_{k,j} = \begin{cases} k+۱ & \text{به ازای } j = k, \\ ۱ & \text{به ازای } |k-j| = ۱, \quad k,j = ۱,۲,\ldots,n-q, \\ ۰ & \text{جاهای دیگر}, \end{cases}$$

$$f_{k,j} = \begin{cases} ۱ & \text{به ازای } k = j+۲q-n, k = ۱,۲,\ldots,q, j = ۱,۲,\ldots,n-q, \\ ۰ & \text{جاهای دیگر}, \end{cases}$$

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مثال

و $k = ۱, ۲, \ldots, n-q$ $\quad w_k = \frac{۱}{k}$.

در شکافت $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{S}$، انتخاب‌های زیادی برای ماتریس $\mathbf{P}$ وجود دارند.

چهار انتخاب زیر را برای این ماتریس در نظر می گیریم:

۱. $\mathbf{P}_۱ = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}^*$.

۲. $\mathbf{P}_۲ = \mathbf{B_D} + \mathbf{B_L} + \mathbf{B_U}^*$.

۳. $\mathbf{P}_۳ = \mathbf{H_A} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$.

۴. $\mathbf{P}_۴ = \mathbf{A}$.

که به ترتیب روش‌های TSS، BTSS، HSS و SS را پدید می‌آورند که در آن $\mathbf{D}$، $\mathbf{L}$ و $\mathbf{U}$ بترتیب ماتریس‌های قطری، پایین مثلثی اکید و بالامثلثی اکید ماتریس $\mathbf{A}$ و

$$\mathbf{B_D} = \begin{bmatrix} W & ۰ \\ ۰ & N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B_L} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -F^T & ۰ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B_U} = \begin{bmatrix} ۰ & F\Omega \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}. \qquad (۱۸)$$

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مثال

فرض کنید Q_j به ازای هر $j = ۱, ۲, ۳$ بصورت زیر باشد:

$$Q_۱ = I, \quad Q_۲ = \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(A)), \quad Q_۳ = BD. \tag{۱۹}$$

روش EPSS را با ماتریس $P = P_i$ و $\Sigma = \alpha Q_j$ درنظر بگیرید. به ازای هر $j = ۱, ۲, ۳$ تقریبی برای پارامتر بهینه برای α بصورت زیر به دست آمده است:

$$\alpha_*^{(i,j)} = \begin{cases} \left\|\tilde{\mathbf{A}}_j\right\|, & i = ۴, \\ \mu_{\max}^{(i,j)}\mu_{\min}^{(i,j)}, & i = ۱, ۲, ۳, \end{cases} \tag{۲۰}$$

که در آن $\tilde{\mathbf{A}}_j = \mathbf{Q}_j^{-\frac{۱}{۲}}\mathbf{A}\mathbf{Q}_j^{-\frac{۱}{۲}}$ و $\mu_{\max}^{(i,j)}$ و $\mu_{\min}^{(i,j)}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{Q}_j^{-\frac{۱}{۲}}\mathbf{B}\mathbf{D}_i\mathbf{Q}_j^{-\frac{۱}{۲}}$ می‌باشند.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

جدول ۱: تکرار و زمان محاسبه برای روش تکراری IEPSS.

	$\Sigma = \alpha \mathbf{Q}_j$	$\mathbf{Q_1 = I}$				$\mathbf{Q_2 = D}$				$\mathbf{Q_3 = BD}$			
n	$\mathbf{P}_i$	$\mathbf{P}_1$(TSS)	$\mathbf{P}_2$(BTSS)	$\mathbf{P}_3$(HSS)	$\mathbf{P}_4$(SS)	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$
400	CPU	0.20	0.11	0.12	0.37	0.08	0.03	0.04	0.06	0.05	0.04	0.02	0.06
	IT	113	104	128	1076	9	9	8	13	6	8	4	7
800	CPU	0.15	0.11	0.12	0.61	0.06	0.09	0.13	0.08	0.07	0.05	0.02	0.15
	IT	159	147	182	1850	8	10	8	12	6	8	3	7
1600	CPU	0.43	0.18	0.20	2.18	0.10	0.08	0.12	0.14	0.12	0.14	0.04	0.37
	IT	223	206	257	3098	8	10	7	11	6	8	3	7
3200	CPU	1.69	0.48	1.39	5.06	1.04	0.39	0.42	1.26	0.47	0.38	0.25	2.30
	IT	314	291	362	4993	8	9	7	11	6	8	3	7
6400	CPU	3.53	1.56	3.05	11.59	2.18	1.91	1.24	2.65	1.67	1.03	0.84	6.13
	IT	442	413	511	7586	8	8	7	11	6	8	3	7

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

۳ـ مسائل نقطه زینی

مسائل نقطه زینی

$$\mathcal{A}\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \qquad (۲۱)$$

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(A+A^*)x > 0)$
- $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ماتریس نیمه معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(C+C^*)x \geq 0)$

در این صورت ماتریس $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مسائل نقطه زینی

$$\mathcal{A}\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \qquad (۲۱)$$

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(A+A^*)x > 0)$
- $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ماتریس نیمه معین مثبت است. $(\forall x \neq 0 \quad x^*(C+C^*)x \geq 0)$

در این صورت ماتریس $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است.

قضیه

اگر ماتریس A یک ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس $\mathcal{A}$ نامنفرد است اگر و تنها اگر

$$null(B^*) \cap null(C) = 0.$$

روش HSS برای حل مسائل نقطه زینی

فرض کنید C یک ماتریس معین مثبت متقارن و $A = H + S$ شکافت هرمیتی و پاد هرمیتی ماتریس A باشد. در این صورت

$$\mathcal{A} = \mathcal{H} + \mathcal{S} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & B^* \\ -B & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۲۲)$$

شکافت هرمیتی و پادهرمیتی ماتریس $\mathcal{A}$ خواهد بود. اگر ماتریس A معین مثبت متقارن باشد، آنگاه پیش‌شرط‌ساز روش HSS به صورت

$$\mathcal{P}_{\text{HSS}} = \begin{bmatrix} A + \alpha I & B^T + \frac{1}{\alpha} A B^T \\ -B & \alpha I + C \end{bmatrix}, \qquad (۲۳)$$

خواهد بود که دارای اختلاف

$$\mathcal{R}_{\text{HSS}} = \mathcal{P}_{\text{HSS}} - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha I & \frac{1}{\alpha} A B^T \\ 0 & \alpha I, \end{bmatrix}, \qquad (۲۴)$$

با ماتریس $\mathcal{A}$ است.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

روش RHSS برای حل مسائل نقطه زینی

یک حالت تعدیل یافته از پیش‌شرط‌ساز HSS در [۹] توسط کائو و همکاران به صورت زیر ارائه شده است:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{RHSS}} = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\alpha}AB^T \\ -B & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\mathrm{RHSS}} = \mathcal{P}_{\mathrm{RHSS}} - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & (\frac{1}{\alpha}A - I)B^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

روش RHSS برای حل مسائل نقطه زینی

یک حالت تعدیل یافته از پیش‌شرط‌ساز HSS در [۹] توسط کائو و همکاران به صورت زیر ارائه شده است:

$$\mathcal{P}_{\text{RHSS}} = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\alpha}AB^T \\ -B & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\text{RHSS}} = \mathcal{P}_{\text{RHSS}} - \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & (\frac{1}{\alpha}A - I)B^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قضیه

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس متقارن معین مثبت، $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس رتبه کامل، و α یک عدد مثبت باشد. در این صورت

$$\rho(\Gamma_{\text{RHSS}}) = \max_{1\le i\le m} |1 - \alpha\mu_i|,$$

که در آن μ_i، به ازای $(1 \le i \le m)$، مقادیر ویژه ماتریس $(BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ هستند. آنگاه روش تکراری RHSS همگراست اگر $0 < \alpha < \frac{2}{\mu_{\max}}$ و در نتیجه $\alpha_{opt} = \frac{2}{\mu_{\max}+\mu_{\min}}$.

روش REHSS برای حل مسائل نقطه زینی

هنگامی که α به عدد صفر نزدیک می‌شود، بلوک‌های (۱, ۲) در پیش‌شرط‌سازهای HSS و RHSS بی‌کران می‌شوند. برای رفع این مشکل، شکافت

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}_{\text{REHSS}} - \mathcal{R}_{\text{REHSS}} = \begin{bmatrix} A & AB^T \\ -B & \alpha I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (A-I)B^T \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \qquad (۲۵)$$

را که در آن $\alpha > 0$، برای ماتریس $\mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

روش REHSS برای حل مسائل نقطه زینی

هنگامی که α به عدد صفر نزدیک می‌شود، بلوک‌های (۱, ۲) در پیش‌شرط‌سازهای HSS و RHSS بی‌کران می‌شوند. برای رفع این مشکل، شکافت

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}_{\text{REHSS}} - \mathcal{R}_{\text{REHSS}} = \begin{bmatrix} A & AB^T \\ -B & \alpha I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (A-I)B^T \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}, \qquad (۲۵)$$

را که در آن $\alpha > 0$، برای ماتریس $\mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم.

قضیه

فرض کنید $Q = B\left(\frac{1}{2}A^{-1} - I\right)B^T$ و $\delta = \lambda_{\max}(Q)$. آنگاه برای هر $\alpha > \max\{\delta, 0\}$، خواهیم داشت $\rho(\Gamma_{\text{REHSS}}) < 1$.

قضیه

به ازای هر $\alpha > 0$، ماتریس پیش‌شرط‌سازی‌شده $\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}^{-1}\mathcal{A}$ دارای مقدار ویژه ۱ از تکرار جبری حداقل n می‌باشد. بقیه مقادیر ویژه برابر μ_i هستند که μ_i مقدار ویژه ماتریس $\hat{A} = (\alpha I + BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ می‌باشد.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

قضیه

به ازای هر $\alpha > 0$، ماتریس پیش‌شرط‌سازی‌شده $\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}^{-1}\mathcal{A}$ دارای مقدار ویژه ۱ از تکرار جبری حداقل n می‌باشد. بقیه مقادیر ویژه برابر μ_i هستند که μ_i مقدار ویژه ماتریس $\hat{A} = (\alpha I + BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ می‌باشد.

نتیجه

درجه چندجمله‌ای مینیمال ماتریس پیش‌شرط‌سازی‌شده $\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}^{-1}\mathcal{A}$ حداکثر برابر $m+1$ است. بنابراین، بعد زیرفضای کرایلف $\mathcal{K}_n(\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}^{-1}\mathcal{A}, b)$ حداکثر برابر $m+1$ می‌باشد.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

قضیه

به ازای هر $\alpha > 0$، ماتریس پیش‌شرط‌سازی‌شده $\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}\mathcal{A}$ دارای مقدار ویژه ۱ از تکرار جبری حداقل n می‌باشد. بقیه مقادیر ویژه برابر μ_i هستند که μ_i مقدار ویژه ماتریس $\hat{A} = (\alpha I + BB^T)^{-1}BA^{-1}B^T$ می‌باشد.

نتیجه

درجه چندجمله‌ای مینیمال ماتریس پیش‌شرط‌سازی‌شده $\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}\mathcal{A}$ حداکثر برابر $m+1$ است. بنابراین، بعد زیرفضای کرایلف $\mathcal{K}_n(\mathcal{P}_{\text{REHSS}}^{-1}\mathcal{A}, b)$ حداکثر برابر $m+1$ می‌باشد.

الگوریتم

۱. $As_1 = x_1$ را حل کنید.

۲. قرار دهید $s_2 = Bs_1 + x_2$

۳. $(\alpha I + BB^T)y_2 = s_2$ را حل کنید.

۴. قرار دهید $y_1 = s_1 - B^T y_2$.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

جدول ۲: نتایج عددی برای مسأله حفره با درپوش متحرک با شبکه $۲^r \times ۲^r$

r	Precon.	$\alpha = 10^{-4}$ IT	$\alpha = 10^{-4}$ CPU	$\alpha = 10^{-2}$ IT	$\alpha = 10^{-2}$ CPU	$\alpha = 1$ IT	$\alpha = 1$ CPU	$\alpha = 10^{2}$ IT	$\alpha = 10^{2}$ CPU
16×16	$\mathcal{P}_{\mathrm{HSS}}$	4	0.04	5	0.06	13	0.16	106	1.46
	$\mathcal{P}_{\mathrm{RHSS}}$	3	0.02	3	0.02	3	0.02	4	0.04
	$\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}$	3	0.02	3	0.02	3	0.02	3	0.02
32×32	$\mathcal{P}_{\mathrm{HSS}}$	8	0.37	9	0.45	144	8.45	†	–
	$\mathcal{P}_{\mathrm{RHSS}}$	5	0.19	5	0.2	5	0.21	9	0.43
	$\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}$	5	0.21	4	0.12	3	0.07	3	0.07
64×64	$\mathcal{P}_{\mathrm{HSS}}$	14	3.87	47	14.21	†	–	†	–
	$\mathcal{P}_{\mathrm{RHSS}}$	8	1.97	8	2.03	9	2.29	27	8.1
	$\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}$	11	3.08	3	0.47	3	0.42	3	0.39
128×128	$\mathcal{P}_{\mathrm{HSS}}$	38	76.32	†	–	†	–	†	–
	$\mathcal{P}_{\mathrm{RHSS}}$	15	30.85	14	25.95	17	33.46	79	160.91
	$\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}$	9	17.3	3	3.86	3	3.69	3	3.86
256×256	$\mathcal{P}_{\mathrm{HSS}}$	**115**	**2064.44**	–	††	–	‡	–	‡
	$\mathcal{P}_{\mathrm{RHSS}}$	37	641.5	**28**	**471.97**	38	648.74	–	‡
	$\mathcal{P}_{\mathrm{REHSS}}$	5	67.63	3	33.11	3	31.91	**3**	**27.43**

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

جدول ۳: پیش‌شرط‌سازهای خاصی از پیش‌شرط‌ساز $\mathfrak{P}_{\mathrm{EPSS}}$

	A	B	C	P_α	P_β	پیش‌شرط‌ساز	نیمه‌همگرایی همگرایی	مرجع
	PD	رتبه کامل	SPSD	αI	αI	$\mathcal{P}_{HSS}$	همگرا	[۴]
	SPSD	رتبه کامل	SPSD	αI	αI	$\mathcal{P}_{HSS}$	همگرا	[۲۲]
	HPD		HPD	αI	βI	$\mathcal{P}_{GHSS}$		
	HPD		HPD	αQ_1	βQ_2	$\mathcal{P}_{EHSS}$		
	HPD	رتبه کامل	۰	αI	$\alpha I + Q$	$\mathcal{P}_{RHSS}$	همگرا	[۱]
	HPD	رتبه ناقص	۰	αI	$\alpha I + Q$	$\mathcal{P}_{RHSS}$	نیمه همگرا	[۱۰]
$\mathbf{B_P = B}$	HPD	رتبه کامل	۰	αA	αQ	$\mathcal{P}_{PHSS}$	همگرا	[۳]
	HPD	رتبه کامل	۰	αA	βQ	$\mathcal{P}_{AHSS}$	همگرا	[۲]
	PD	رتبه کامل	۰	αI	αI	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	همگرا	[۱۴]
	PD	رتبه کامل	HPSD	αI	αI	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	همگرا	[۲۰]
	PD	رتبه کامل	۰	αI	βI	$\mathcal{P}_{GPSS}$	همگرا	[۱۲،۲۳]
	PD	رتبه ناقص	۰	αQ_1	βQ_2	$\mathcal{P}_{EPSS}(\mathcal{P}_{PDPSS})$	نیمه همگرا	[۱۳]
	PD	رتبه کامل	۰	αI	$\alpha I + Q$	$\mathcal{P}_{RPSS}$	همگرا	[۵]

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

	A	B	C	P_α	P_β	پیش‌شرط‌ساز	نیمه‌همگرایی همگرایی	مرجع
$B_P = 0$	HPD	رتبه کامل	۰	αI	αI	$\mathcal{P}_{SS}$	همگرا	[۶]
	SPD	رتبه کامل	۰	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	همگرا	[۱۵،۱۱]
	SPD	رتبه کامل	SPSD	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	همگرا	[۱۶]
	PD	رتبه ناقص	۰	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	نیمه همگرا	[۸]
	SPD	رتبه ناقص	۰	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	نیمه همگرا	[۲۱]
	PD	رتبه کامل و ناقص	SPSD	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	نیمه همگرا و همگرا	[۱۹]
	SPD	رتبه کامل	SPSD	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	همگرا	[۱۶]
	PD	رتبه کامل	SPSD	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	همگرا	[۱۷]
	PD	رتبه کامل	۰	αI	βI	$\mathcal{P}_{GSS}$	همگرا	[۷]
	SPD	رتبه کامل	۰	Q_1	Q_2	$\mathcal{P}_{ESS}$	همگرا	[۲۴]
	PD	رتبه ناقص	۰	αQ_1	βQ_2	$\mathcal{P}_{ESS}$	نیمه همگرا	[۱۸]

جدول ۴: نتایج عددی برای همگرایی روش‌های مختلف هنگامیکه ماتریس A نامنفرد است.

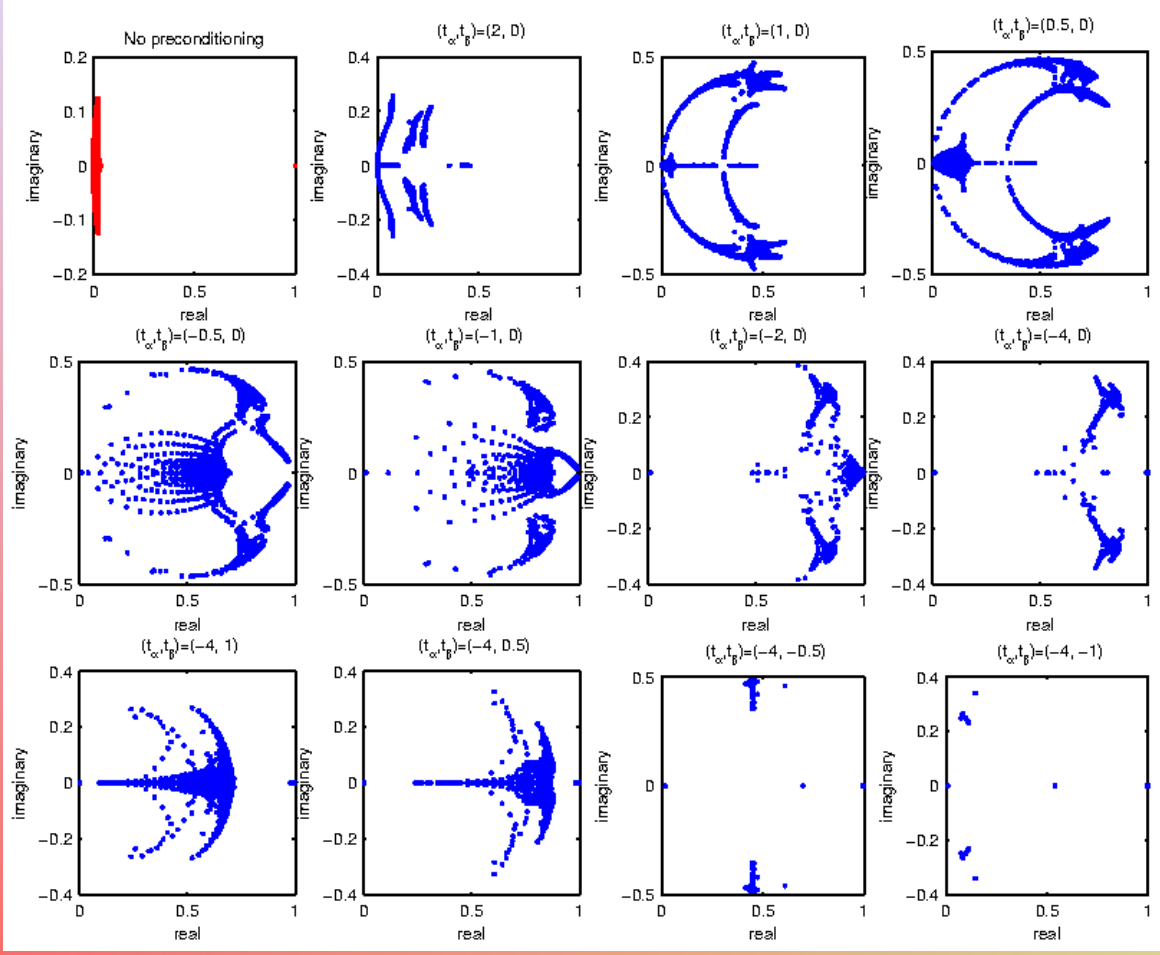
grid	prec.	HSS	GHSS	EHSS	PSS	GPSS	EPSS	SS	GSS	ESS	SEPSS
32×32	t_α	−2.25	−2.00	−0.75	−2.25	−2.00	−0.75	−4.00	−3.75	−3.50	−4.00
	t_β	−2.25	−2.50	−0.75	−2.25	−2.50	−0.75	−4.00	−4.00	−3.75	0.00
	IT	61	54	52	74	56	54	6	6	3	17
	CPU	0.14	0.11	0.12	0.10	0.08	0.08	0.02	0.03	0.02	0.02
	R_K	7.5e−10	8.8e−10	8.0e−10	9.6e−10	9.1e−10	9.5e−10	6.9e−11	7.9e−10	7.3e−10	4.3e−10
64×64	t_α	−2.50	−2.25	−1.00	−2.75	−2.25	−1.00	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00
	t_β	−2.50	−3.75	−1.25	−2.75	−3.75	−1.25	−4.00	−4.00	−3.75	0.00
	IT	199	92	90	156	92	90	9	9	3	17
	CPU	3.62	1.31	1.50	1.16	0.56	0.55	0.21	0.20	0.14	0.14
	R_K	9.3e−10	8.7e−10	9.6e−10	8.7e−10	8.7e−10	8.8e−10	1.7e−10	1.7e−10	6.5e−10	8.1e−10
128×128	t_α	–	−2.50	−1.25	−3.50	−2.50	−1.25	−4.00	−4.00	−3.75	−4.00
	t_β	–	−4.00	−1.50	−3.50	−4.00	−1.75	−4.00	−4.00	−3.75	0.00
	IT	†	231	163	430	235	164	17	17	4	19
	CPU	–	18.80	15.55	10.86	6.36	4.41	1.89	1.91	1.12	0.86
	R_K	–	9.6e−10	9.6e−10	9.9e−10	9.7e−10	9.9e−10	3.1e−10	3.1e−10	4.9e−10	6.1e−10
256×256	t_α	–	–	−1.25	–	–	−1.25	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00
	t_β	–	–	−2.00	–	–	−2.00	−4.00	−4.00	−4.00	0.00
	IT	†	†	243	†	†	242	44	44	4	24
	CPU	–	–	129.01	–	–	31.72	13.11	12.69	10.57	7.49
	R_K	–	–	9.9e−10	–	–	1.0e−09	9.0e−10	9.0e−10	7.7e−10	5.5e−10

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

جدول ۵: نتایج عددی برای همگرایی روش‌های مختلف هنگامیکه ماتریس A منفرد است.

grid	prec.	HSS	GHSS	EHSS	PSS	GPSS	EPSS	SS	GSS	ESS	SEPSS
32×32	t_α	−2.25	−2.25	−0.75	−2.25	−2.00	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00
	t_β	−2.25	−2.25	−0.75	−2.25	−2.50	2.75	−4.00	−4.00	−4.00	0.00
	IT	41	41	41	48	46	19	5	5	3	10
	CPU	0.14	0.12	0.13	0.05	0.10	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02
	R_K	9.7e−10	9.7e−10	8.7e−10	8.5e−10	9.8e−10	1.0e−09	1.0e−10	1.0e−10	2.2e−12	9.6e−10
64×64	t_α	−2.50	−2.50	−1.25	−2.50	−2.50	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00
	t_β	−2.50	−3.00	−0.50	−2.50	−3.00	3.00	−4.00	−3.75	−4.00	0.00
	IT	73	65	67	71	61	43	7	7	3	11
	CPU	1.34	1.32	1.92	0.41	0.36	0.24	0.19	0.23	0.15	0.14
	R_K	9.1e−10	8.8e−10	8.9e−10	9.3e−10	9.7e−10	9.9e−10	3.4e−10	7.1e−10	1.1e−11	9.8e−10
128×128	t_α	−2.75	−2.75	−1.25	−3.00	−2.75	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00
	t_β	−2.75	−3.75	−1.25	−3.00	−3.75	2.75	−4.00	−4.00	−3.50	0.25
	IT	144	104	103	114	95	87	12	12	3	13
	CPU	14.72	12.33	13.73	4.20	3.95	2.38	2.33	2.01	1.05	0.81
	R_K	9.9e−10	9.6e−10	1.0e−09	9.3e−10	9.5e−10	9.9e−10	6.4e−10	6.4e−10	1.9e−10	9.3e−10
256×256	t_α	−3.25	−3.00	−1.50	−3.25	−3.00	−1.75	−4.00	−4.00	−4.00	−4.00
	t_β	−3.25	−4.00	−1.50	−3.25	−4.00	−0.75	−4.00	−4.00	−3.75	−0.25
	IT	259	170	164	234	167	153	31	31	3	14
	CPU	349.78	140.05	110.58	36.75	25.45	23.76	11.75	11.40	10.29	6.51
	R_K	9.6e−10	9.3e−10	9.7e−10	9.8e−10	9.8e−10	9.7e−10	9.0e−10	9.0e−10	6.8e−10	6.8e−10

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع



شکل ۱: مقادیر ویژه ماتریس $\mathcal{P}_{\mathrm{SEPSS}}^{-1}\mathcal{A}$ برای مسئله نویر– استوکس.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

Theorem

قضیه

Theorem

قضیه

Lemma

لم

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

Theorem

قضیه

Lemma

لم

Remark

تبصره

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

Theorem
قضیه

Lemma
لم

Remark
تبصره

Proposition
گزاره

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

Theorem
قضیه

Lemma
لم

Remark
تبصره

Proposition
گزاره

Note
نکته

Theorem
قضیه

Lemma
لم

Remark
تبصره

Proposition
گزاره

Note
نکته

Algorithm
الگوریتم

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

Theorem
قضیه

Lemma
لم

Remark
تبصره

Proposition
گزاره

Note
نکته

Algorithm
الگوریتم

Corollary
نتیجه

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

Definition

تعریف

Definition

تعریف

Proof

اثبات

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

Definition

تعریف

Proof

اثبات

۴ـ مراجع

مقدمه

روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی

مسائل نقطه زینی

مراجع

مراجع

[1] Bai, Z.-Z., and Benzi, M. Regularized HSS iteration methods for saddle-point linear systems. *BIT Numerical Mathematics 57*, 2 (2017), 287–311.

[2] Bai, Z.-Z., and Golub, G. H. Accelerated Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for saddle-point problems. *IMA Journal of Numerical Analysis 27*, 1 (2007), 1–23.

[3] Bai, Z.-Z., Golub, G. H., and Pan, J.-Y. Preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite linear systems. *Numerische Mathematik 98*, 1 (2004), 1–32.

[4] Benzi, M., and Golub, G. H. A preconditioner for generalized saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 26*, 1 (2004), 20–41.

[5] Cao, Y. Regularized DPSS preconditioners for non-Hermitian saddle point problems. *Applied Mathematics Letters 84* (2018), 96–102.

[6] Cao, Y., Du, J., and Niu, Q. Shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics 272* (2014), 239–250.

[7] Cao, Y., Li, S., and Yao, L.-Q. A class of generalized shift-splitting preconditioners for nonsymmetric saddle point problems. *Applied Mathematics Letters 49* (2015), 20–27.

[8] Cao, Y., and Miao, S.-X. On semi-convergence of the generalized shift-splitting iteration method for singular nonsymmetric saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications 71*, 7 (2016), 1503–1511.

مقدمه

روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی

مسائل نقطه زینی

مراجع

[9] Cao, Y., Yao, L., Jiang, M., and Niu, Q. A relaxed HSS preconditioner for saddle point problems from meshfree discretization. *Journal of Computational Mathematics 31*, 4 (2013), 398–421.

[10] Chao, Z., Chen, G., and Guo, Y. On the semi-convergence of regularized HSS iteration methods for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications 76*, 2 (2018), 438–450.

[11] Chen, C.-R., and Ma, C.-F. A generalized shift-splitting preconditioner for singular saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation 269* (2015), 947–955.

[12] Huang, Z.-G., Wang, L.-G., Xu, Z., and Cui, J.-J. A generalized variant of the deteriorated PSS preconditioner for nonsymmetric saddle point problems. *Numerical Algorithms 75*, 4 (2017), 1161–1191.

[13] Liang, Z.-Z., and Zhang, G.-F. Semi-convergence analysis of preconditioned deteriorated PSS iteration method for singular saddle point problems. *Numerical Algorithms 78*, 2 (2018), 379–404.

[14] Pan, J.-Y., Ng, M. K., and Bai, Z.-Z. New preconditioners for saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation 172*, 2 (2006), 762–771.

[15] Ren, Z.-R., Cao, Y., and Niu, Q. Spectral analysis of the generalized shift-splitting preconditioned saddle point problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics 311* (2017), 539–550.

[16] Salkuyeh, D. K., Masoudi, M., and Hezari, D. On the generalized shift-splitting preconditioner for saddle point problems. *Applied Mathematics Letters 48* (2015), 55–61.

مقدمه
روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی
مسائل نقطه زینی
مراجع

[17] Salkuyeh, D. K., Masoudi, M., and Hezari, D. A preconditioner based on the shift-splitting method for generalized saddle point problems. in *46th Annual Iranian Mathematics Conference* (2015), volume 1, Yazd University, pp. 1061–1064.

[18] Salkuyeh, D. K., and Rahimian, M. A modification of the generalized shift-splitting method for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications 74*, 12 (2017), 2940–2949.

[19] Shen, Q.-Q., and Shi, Q. Generalized shift-splitting preconditioners for nonsingular and singular generalized saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications 72*, 3 (2016), 632–641.

[20] Shen, S.-Q. A note on PSS preconditioners for generalized saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation 237* (2014), 723–729.

[21] Shi, Q., Shen, Q.-Q., and Yao, L.-Q. Eigenvalue bounds of the shift-splitting preconditioned singular nonsymmetric saddle-point matrices. *Journal of Inequalities and Applications 269* (2015), 947–955.

[22] Simoncini, V., and Benzi, M. Spectral properties of the Hermitian and skew-Hermitian splitting preconditioner for saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 26*, 2 (2004), 377–389.

[23] Wang, R.-R., Niu, Q., Ma, F., and Lu, L.-Z. Spectral properties of a class of matrix splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics 298* (2016), 138–151.

[24] Zheng, Q., and Lu, L. Extended shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics 313* (2017), 70–81.

مقدمه

روش EPSS برای حل دستگاه معادلات خطی

مسائل نقطه زینی

مراجع

با تشکر از توجه شما